الصفحة
1 / 5

الامتحان التجريبي الأول لنيل شهادة البكالوريا مدينة زايو 2018

9	المعامل	الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	الشعبة

بسم الله الرحمن الرحيم

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من مسألة تحتوي على ستة أجزاء مرتبطة فيما بينها.
- يمكن إنجاز أجزاء المسألة حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- الجزء الأول يتعلق بالتحليل...(5.00 ن)
- الجزء الثاني يتعلق بالتحليل...(0.75 ن)
- الجزء الثالث يتعلق بالتحليل ....(3.25 ن)
- الجزء الرابع يتعلق بالتحليل ....(5.75 ن)
- الجزء الخامس يتعلق بالتحليل ....(3.25 ن)
- الجزء السادس يتعلق بالتحليل...(2.00 ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

N.B: toute réponse non justifiée ou non détaillée sera considérée comme fausse

إعداد الأستاذين : سفيان طجيو و عبد العلي طجيو

مسـألة "20 نقطة"

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي :

$$f(x)=\sqrt[3]{\tan^2 x}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و $\|\vec{i}\|=2\ cm$.

الجزء الأول:

1.00 ن 1) a- بين أن الدالة f متصلة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ وقابلة للاشتقاق على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

0.50 ن b- بين أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

0.50 ن c- بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.

0.50 ن 2) a- بين أن الدالة f تقابل من المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ نحو المجال J ينبغي تحديده.

0.75 ن b- أنشيء في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى (C_f) والمنحنى $(C_{f^{-1}})$.

(نعطي : $f\left(\frac{\pi}{3}\right)\approx 1,4$ و $f\left(\frac{\pi}{4}\right)\approx 1$)

0.25 ن 3) a- بدون حساب $f^{-1}(2)$، بين أن : $f^{-1}(2)>\frac{\pi}{3}$.

0.25 ن b- استنتج أن : $f^{-1}(2)>1$.

0.75 ن 4) a- بين أن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$، ثم أن :

$$(\forall x\in\mathbb{R}_+^*);\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{3\sqrt{x}}{2\left(1+x^3\right)}$$

0.50 ن b- بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر، ثم حدد $\left(f^{-1}\right)'_d(0)$.

الجزء الثاني: لتكن ϕ الدالة المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases}\phi(x)=\dfrac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1};\quad x\neq 1\\ \phi(1)=m\end{cases}$$

0.25 ن 1) حدد D_ϕ مجموعة تعريف الدالة ϕ.

0.50 ن 2) حدد العدد m لكي تكون الدالة ϕ متصلة على D_ϕ.

الجزء الثالث:

لتكن ψ الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $\psi(x)=f^{-1}(x^2)+f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

0.75 ن (1 -a بين أن الدالة ψ قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$، ثم أحسب $\psi'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.

0.50 ن -b استنتج أن : $(\forall x\in]0,+\infty[);\ \psi(x)=\frac{\pi}{2}$.

0.25 ن -c استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ f^{-1}(n)+f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{2}$.

(2 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $u_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

0.50 ن -a بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f^{-1}(n+k)$.

0.25 ن -b بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall k\in\{0,1,\cdots,n\})\ ;\ f^{-1}(n)\le f^{-1}(n+k)\le f^{-1}(2n)$.

0.50 ن -c بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ \frac{\pi}{2}-f^{-1}(2n)\le u_n\le\frac{\pi}{2}-f^{-1}(n)$.

0.50 ن -d استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

الجزء الرابع:

نفترض أن : $h(x)=f^{-1}(x+1)$.

0.25 ن (1 -a حدد $\mathcal{D}_h$ مجموعة تعريف الدالة h.

0.50 ن -b بدون حساب المشتقة الأولى h' حدد تغيرات الدالة h.

0.50 ن -c بين أن المنحنى $(\mathcal{C}_h)$ صورة المنحنى $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}=a\vec{i}$ بحيث a عدد حقيقي يتم تحديده.

0.50 ن -d أنشيء في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى $(\mathcal{C}_h)$.

0.50 ن (2 أحسب المشتقة الأولى للدالة h.

0.50 ن (3 بين أن : $(\forall x\in[-1,+\infty[);\ 0\le h(x)\le\frac{5}{3}$.

0.50 ن 4) a- بين أن المعادلة $h(x)=x$ تقبل حلا وحيداً α في المجال $]-1,+\infty[$.

(نقبل أن : $(\forall x>-1);\ h'(x)<1$).

0.50 ن b- بين أن : $1\le\alpha\le\frac{5}{3}$.

5) نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$v_0=\frac{4}{3}$ و $v_{n+1}=h(v_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

0.50 ن a- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\ 1\le v_n\le\frac{5}{3}$.

0.50 ن b- بين أن : $\left(\forall x\in\left]1,\frac{5}{3}\right[\right);\ |h'(x)|\le\frac{4}{5}$.

0.50 ن c- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\ |v_{n+1}-\alpha|\le\frac{4}{5}|v_n-\alpha|$.

0.50 ن d- استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\alpha$.

الجزء الخامس:

ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة φ_n المعرفة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي : $\varphi_n(x)=x+n-n\sqrt{(f(x))^3}$.

0.50 ن 1) a- بين أن الدالة φ_n تناقصية قطعا على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

0.50 ن b- بين أن المعادلة $\varphi_n(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α_n في المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

0.75 ن c- بين أن : $\frac{\pi}{4}<\alpha_n<\frac{\pi}{2}$ وأن : $\tan(\alpha_n)=1+\frac{\alpha_n}{n}$.

0.75 ن 2) a- بين أن $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\varphi_{n+1}(\alpha_n)<0$، ثم استنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تناقصية.

0.75 ن b- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محدداً نهايتها.

الجزء السادس:

لكن n من $\mathbb{N}^*$، نفترض أن : $g_n(x)=(1-x)^n f^{-1}(x)$.

0.50 ن 1) بين أن : $(\exists\beta_n\in]0,1[);\ g_n'(\beta_n)=0$.

0.50 ن | 2) a- بين أن : $g_n(\beta_n)=\dfrac{3\sqrt{\beta_n}(1-\beta_n)^{n+1}}{2n(1-\beta_n^3)}$.

0.50 ن | b- استنتج أن : $0<g_n(\beta_n)<\dfrac{3(1-\beta_n)^{n+1}}{2n}$.

3) نفترض أنه يوجد M محصور قطعا بين 0 و 1 بحيث : $M\le\beta_n<1$.

0.50 ن | ✓ استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(\beta_n)=0$.

إنتهى الموضوع

bon courage et bonne chance ☺